Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

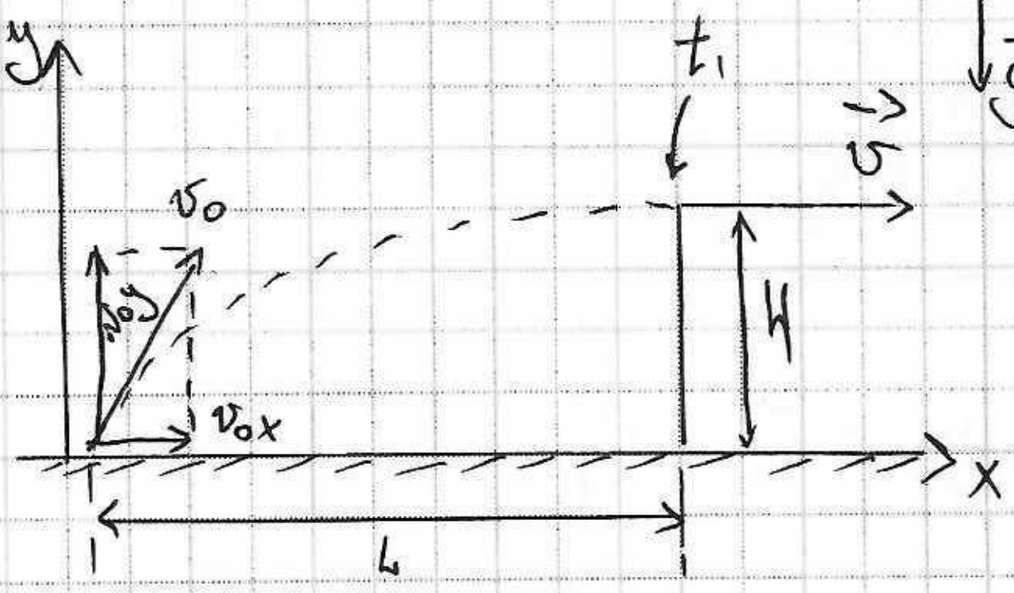
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Задача 1.

Дано: a, $H=5$м, $L=10$м, $|\vec{v}| = |\vec{v_0}|$, $g=10$ м/с^2, $v_0, a = ?$



1. Разложим v_0 на две компоненты v_{0x} и v_{0y}

$$v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_0^2$$

2. $v_y = 0$ $v_x = v = v_0$

3. Запишем выражения $v(t)$, а также законы движения на ось x и y

$$v_x(t) = v_{0x} + at \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt \Leftarrow t_1 - \text{время полета над стеной}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = v_{0x}t + \frac{at^2}{2}$$

$$L = v_{0x}t_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v = v_{0x} + at_1 = v_0 \qquad v_{0x} = v_0 - at_1$$

$$L = (v_0 - at_1)t_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$L = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}$$

$$0 = v_{0y} - gt_1 \qquad gt_1 = v_{0y} \ (1)$$

$$H = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = gt_1^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$v_{0y} = \sqrt{2gH}$$

$$\frac{at_1^2}{2} = v_0 t_1 - L \qquad at_1 = \frac{2(v_0 t_1 - L)}{t_1}$$

Можно использовать оборот листа для записи решений

$$at_1 = \frac{2(v_0 t_1 - L)}{t_1} = 2v_0 - \frac{2L}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} = 2v_0 - L\sqrt{\frac{2g}{H}}$$

$$v_{0x} = v_0 - at_1 = L\sqrt{\frac{2g}{H}} - v_0$$

$$(v_{0x})^2 + (v_{0y})^2 = v_0^2$$

$$2gH + v_0^2 + L^2 \cdot \frac{2g}{H} - 2Lv_0\sqrt{\frac{2g}{H}} = v_0^2$$

$$2gH + \frac{2gL^2}{H} = 2Lv_0 \cdot \sqrt{\frac{2g}{H}} \qquad gH + \frac{gL^2}{H} = Lv_0\sqrt{\frac{2g}{H}}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{gH + g\frac{L^2}{H}}{L\cdot\sqrt{\frac{2g}{H}}}}$$

$$a = \frac{2(v_0 t_1 - L)}{t_1^2} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$a = \frac{2\left(\frac{gH + g\frac{L^2}{H}}{L\cdot\sqrt{\frac{2g}{H}}} - L\right)}{\frac{2H}{g}}$$

$$a = \frac{\frac{gH^2 + gL^2}{gL} - L}{\frac{2H}{g}} = \frac{gH^2}{2HL} = \boxed{\frac{gH}{2L} = a}$$

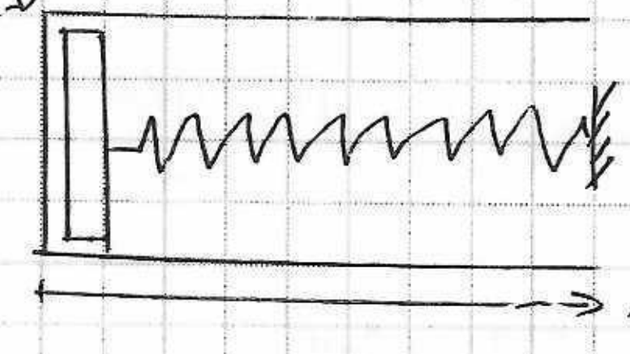
Ответ: $v_0 = \dfrac{gH + g\frac{L^2}{H}}{L\sqrt{\frac{2g}{H}}}$; $a = \dfrac{gH}{L}$

$v_0 = 12{,}5$ м/с ; $a = 5$ м/с^2

Задача 4

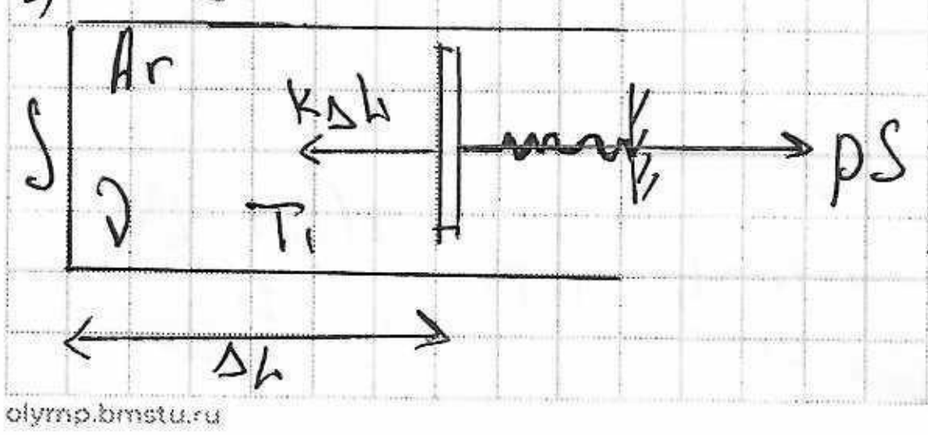
Дано: $\Delta h = 5$ см, $\Delta h_1 = 5$ см, $A = 1{,}5$ Дж, $Q = 0$.

1)



Введем ось X (координата поршня по X равна величине сжатия пружины на данный момент, т.к изначально не деформирована)

2) Пусть всего впустим ν - моль аргона. (т.к аргон инертный газ кол-во степеней свободы $i = 3$)



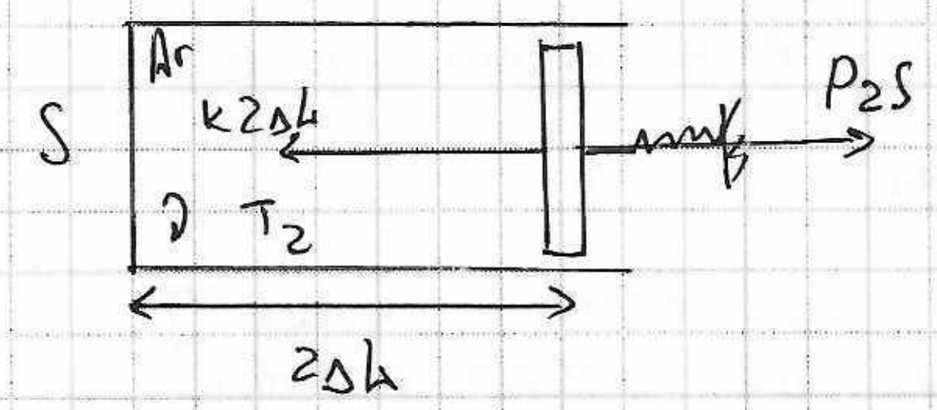
$pS = k\Delta L$ (условие равновесия поршня)

Менделеева-Клапейрона: $pS\Delta h = \nu RT_1$

$$T_1 = \frac{k\Delta L^2}{\nu R}$$

olymp.bmstu.ru

3).



$k \cdot 2\Delta h = P_2 S$ (условие равновесия поршня)

Менделеева – Клапейрона:

$P_2 S \cdot 2\Delta h = \nu R T_2$

$T_2 = \frac{2\Delta h \cdot k \cdot 2\Delta h}{\nu R} = \frac{4\Delta h^2 k}{\nu R}$

Запишем первое начало термодинамики:

$Q + A_{ВН} = \Delta U + \cancel{\Delta E_{кин\ у.м}}^{0}$

$Q = \Delta U - A_{ВН}$ $\quad \Delta U = \frac{i}{2}\nu R \Delta T$

$Q = ?$

$A_{ВН} = -1{,}5\, k\nu x = -A_{Ar}$

A_B – на сжатие пружины $\quad k\Delta h^2 = \frac{2}{3}A$

$A_{ВН} = -\Delta E_{пот} = \frac{k\Delta h^2}{2} - \frac{4k\Delta h^2}{2} = -\frac{3}{2}k\Delta h^2$

$Q = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}k\Delta h^2 = \frac{i}{2}\nu R\left(\frac{4k\Delta h^2}{\nu R} - \frac{k\Delta h^2}{\nu R}\right) + \frac{3}{2}k\Delta h^2 =$

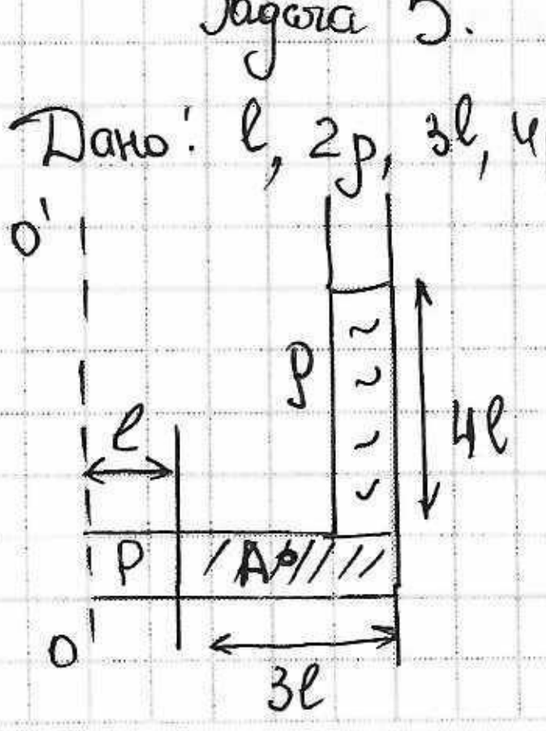
$= \frac{3i}{2}\left(k\Delta h^2\right) + \frac{3}{2}k\Delta h^2 = \frac{9+3}{2}k\Delta h^2 = 6k\Delta h^2 = 6 \cdot \frac{2}{3}A = 4A = 6k\nu x$

Ответ: $Q = 6k\nu x$.

$Q = 4A = (i+1)A$

Задача 5.

Дано: ℓ, 2ρ, 3ℓ, 4ℓ, ρ $\quad \omega = ?$



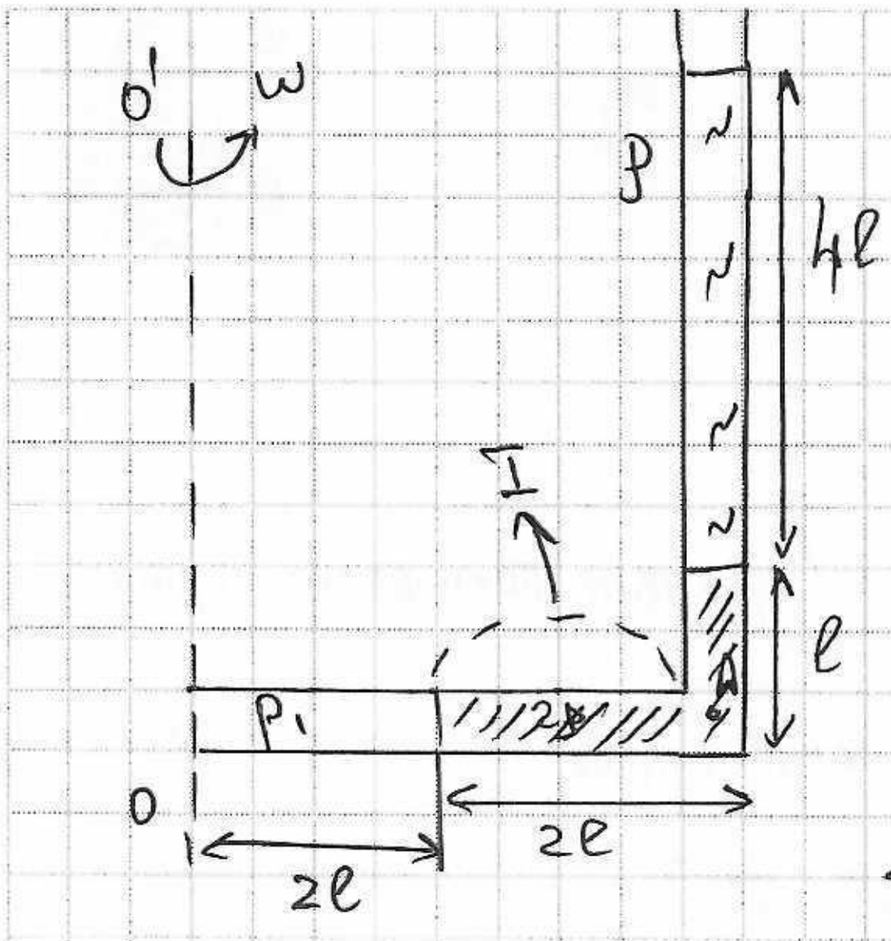
ρ – давление газа при $\omega = 0$

$P_A = \rho = 4\ell \cdot \rho g$ (трубка тонкая, ее площадь сечения S)

Менделеева – Клапейрона:

$\rho S\ell = \nu RT = const$

т.к $T = const$ $\quad \rho \cdot \ell = const$.



(используется условие несжимаемости жидкости.

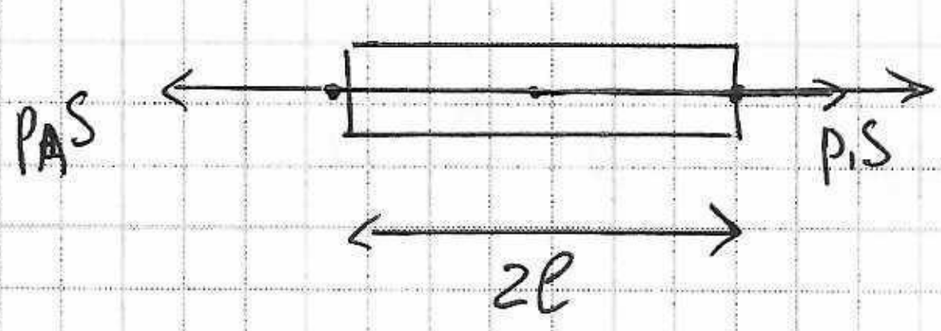
$p_1 \cdot 2\ell = \rho \cdot \ell \quad p_1 = \frac{\rho}{2}$

нормальное ускорение: $p_1 = 2\rho g\ell$

$a_\perp = \omega^2 R$ R - расстояние до оси вращения.

$p_A = 4\rho g\ell + 2\rho \cdot g\ell = 6\rho g\ell$

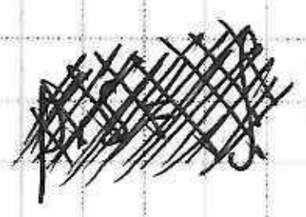
Для решения задачи выделим кусочек I и запишем для него условие равновесия.



$dm = 2\rho \cdot S \cdot dR$

$\int dm \cdot a_\perp$

$p_1 S + \int dm\, a_\perp = p_A S$



$p_1 S + \int_{2\ell}^{4\ell} 2\rho S \omega^2 R\, dR = p_A S$

$p_1 + \rho\omega^2 \int_{2\ell}^{4\ell} R\, dR = p_A \quad p_1 + 2\rho\omega^2 \left(\frac{(4\ell)^2}{2} - \frac{(2\ell)^2}{2} \right) = p_A$

$p_1 + 2\rho\omega^2 \left(\frac{16\ell^2 - 4\ell^2}{2} \right) = p_A$

$p_1 + 2\rho\omega^2 \cdot \frac{12\ell^2}{2} = p_A \quad p_1 + 12\rho\omega^2\ell^2 = p_A$

$2\rho g\ell + 12\rho\omega^2\ell^2 = 6\rho g\ell$

$12\rho\omega^2\ell^2 = 4\rho g\ell$

$3\omega^2\ell^2 = g\ell$

$\omega^2 = \frac{g}{3\ell} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{3\ell}}$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g}{3\ell}}$

Ситуационная Задача

Дано: $V = 1л \quad p_{O_2} = 0{,}5 атм \quad T_0 = 293K$

olymp.bmstu.ru

Запишем хим. реакцию:

$Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3\downarrow + Q + O_2$ (↑ избыток.)

$M(Al) = 27$ г/моль

$M(O) = 16$ г/моль

1 атм $= 10^5$ Па

Без избытка:

$4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3$

Менделеева-Клапейрона для начальной ситуации:

$$p_{O_2} V = \nu_{O_2} R T_0 \qquad \nu_{O_2} = \frac{p_{O_2} V}{R T_0}$$

$\Rightarrow$ после сгорания остается $\frac{\nu_{O_2}}{2}$ кислорода $\Leftrightarrow$ прореагировало $\frac{\nu_{O_2}}{2}$ кислорода

$$\frac{\nu_{Al_2O_3}}{\nu_{O_2(реаг)}} = \frac{2}{3} \qquad \nu_{Al} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\nu_{O_2}}{2} = \frac{2}{3}\nu_{O_2}$$

$$\nu_{Al_2O_3} = \frac{\nu_{O_2}}{3}$$

$$m(Al_2O_3) = \nu_{Al_2O_3} \cdot \mu(Al_2O_3) = \frac{\nu_{O_2}}{3}\left(2\mu(Al) + 3\mu(O_2)\right) =$$

$$= \frac{p_{O_2} V}{3RT_0}\left(2 \cdot 27 + 3 \cdot 16\right) \cdot 10^{-3} = \frac{0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}\left(102 \cdot 10^{-3}\right) =$$

$= 0{,}698$ г.

$$\boxed{m(Al_2O_3) = 0{,}698 \text{ г} \approx 0{,}7 \text{ г}}$$

Окончание горения

$p_{max} - ?$

Для определения Q которое ушло к оставшемуся кислороду запишем ПНТ.

$$\nu_к = \nu_{O_2 ост} + \nu_{Al_2O_3} = \frac{\nu_{O_2}}{2} + \frac{\nu_{O_2}}{3} = \frac{5}{6}\nu_{O_2} = \frac{5}{6}\frac{p_{O_2} V}{RT_0} = \nu_к$$

$$Q = \frac{i_{O_2}}{2}\frac{\nu_{O_2}}{2} R (T_к - T_0) \qquad i_{O_2} = 5 \quad i_{Al} = 3 \quad i_{Al_2O_3} = 6$$

~~Для реагирующих веществ:~~

Для определения конечной температуры запишем ПНТ для всего содержимого.

$$\cancel{Q}^{0} + \cancel{A_{ВН}}^{0} = \Delta U + \cancel{\Delta E_{кин}}^{0}_{ум}$$

не подводилось тепло и объем const

$$U_{кон} - U_{нач} = 0$$

(все тепло выделившееся при реакции идет на нагрев остатка кислорода)

$$U_{кон} = \underbrace{\frac{5}{2} R \frac{\nu_{O_2}}{2} \cdot T_к}_{\text{остаток}} + \underbrace{\frac{6}{2} R \cdot \frac{\nu_{O_2}}{3} \cdot T_к}_{\text{оксид}} = \frac{5}{4}\nu_{O_2} R T_к + \nu_{O_2} R T_к$$

$$U_{кон} = \frac{9}{4}\nu_{O_2} R T_к$$

$$U_{нач} = \cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \nu_{O_2}} = \frac{5}{2}\nu_{O_2} R T_0 + \cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \nu_{O_2} R T_0} = \cancel{\frac{5}{2}\nu_{O_2} 2T_0}$$

$\times \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \nu_{O_2} R T_0$

$$U_{кон} = U_{нач} \quad \cancel{\frac{9}{4} T_к = \frac{5}{2} T_0} = \frac{7}{2}\nu_{O_2} R T_0 \quad \frac{9}{4} T_к = \frac{7}{2} T_0$$

$$\cancel{T_к = \frac{10}{9} T_0} \qquad T_к = \frac{14}{9} T_0$$

$$pV = \nu RT$$

$$p_{O_2} \cdot V = \nu_{O_2} R T_0$$

$$p_к V = \left(\frac{\nu_{O_2}}{2} + \frac{\nu_{O_2}}{3}\right) R T_к$$

$$\frac{p_к}{p_0} = \frac{5}{1}\frac{6}{1} \cdot \frac{T_к}{T_0} = \frac{5}{6} \cdot \frac{14}{9} = \frac{35}{27}$$

$$p_к = \frac{35}{27} p_0 = 0{,}65 \text{ атм} = 65 \text{ кПа}$$

Ответ: $m(Al_2O_3) = \frac{\nu_{O_2}}{3}\left(2 \cdot \mu(Al) + 3 \cdot \mu(O)\right) = \frac{p_{O_2} V}{3RT_0}\left(2\mu(Al) + 3\mu(O)\right) = 0{,}698 \text{ г.}$

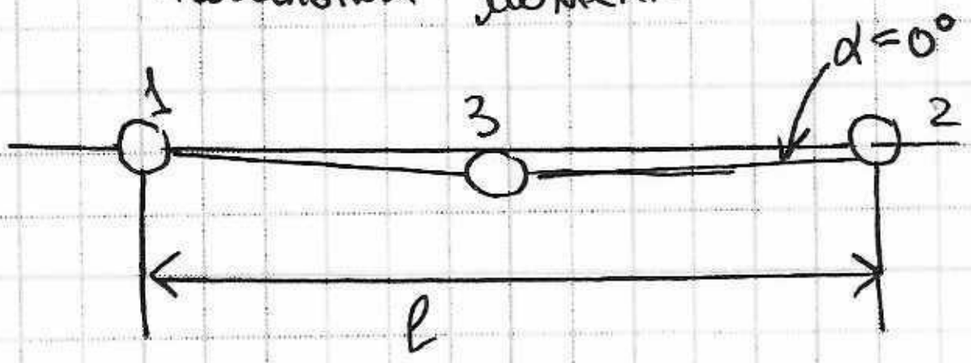
$p_к = \frac{35}{27} p_0 = 65 \text{ кПа}$

Задача 6.

Дано: $l = 1{,}5 \text{ м}$; $s = 1{,}2 \text{ м}$; $m = 0{,}1 \text{ кг}$; $g = 10 \text{ м/с}^2$; $v = ?$ $T = ?$

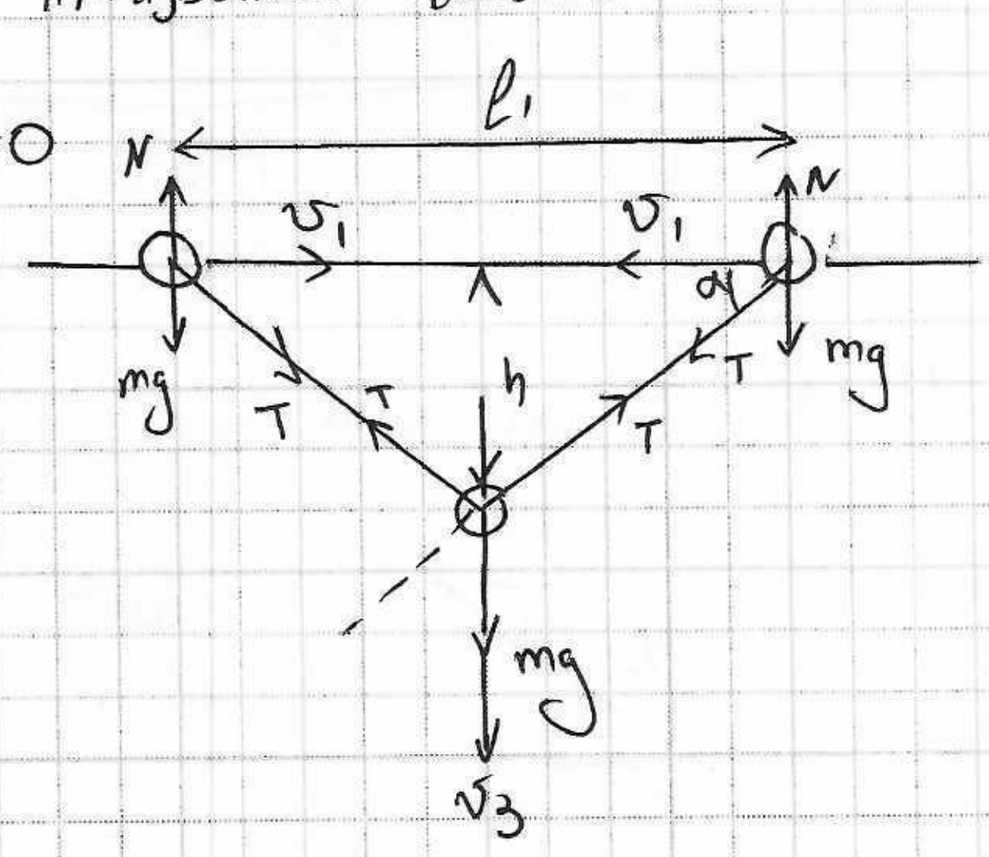
olymp.bmstu.ru

Начальный момент:



$E_{пот} = 0$

Произвольный момент:



1. В силу симметрии бусинка 3 движется вниз, скорости бусинок 1 и 2 одинаковы по модулю, направлены друг к другу

1 и 2 движутся вдоль стержня.

$v_1 = v_2 = v_1$

Запишем ЗСЭ

$E_{кин} + E_{пот} = const = 0$

$$0 = -mgh + \frac{mv_3^2}{2} + \frac{2m}{2}\cdot(v_3 tg\alpha)^2$$

$$mgh = \frac{mv_3^2}{2} + m(v_3 tg\alpha)^2$$

$$gh = v_3^2\left(\frac{1}{2} + tg^2\alpha\right)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2gh}{1+2tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2g\cdot\frac{1}{2}\sqrt{e^2-s^2}}{1+2tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{e^2-s^2}}{1+2tg^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{g\sqrt{e^2-s^2}}{1+2\cdot\frac{e^2-s^2}{s^2}}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{e^2-s^2}}{\frac{2e^2-s^2}{s^2}}} = s\cdot\sqrt{g\cdot\frac{\sqrt{e^2-s^2}}{2e^2-s^2}} = 2{,}06\ м/с$$

$$h = \sqrt{\frac{e^2}{4} - \frac{s^2}{4}}$$

ЗЗ условия нерастяжимости нити:

$v_1\cdot\cos\alpha = v_3\cdot\sin\alpha \quad v_1 = v_3\cdot tg\alpha$

$s = 1{,}2\ м$

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{\frac{e^2}{4} - \frac{s^2}{4}}}{\frac{s}{2}} = \frac{\sqrt{e^2-s^2}}{s} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e}{s}\right)^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

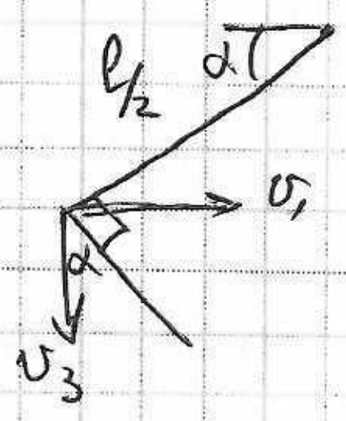
$v_1 = v_2 = v_3 tg\alpha = 1{,}54\ м/с$

$$m\cdot\frac{dv_3}{dt}=mg-2T\sin\alpha$$

$$m\frac{dv_1}{dt}=T\cos\alpha=\frac{m\,d(v_3\operatorname{tg}\alpha)}{dt}=\frac{m\,dv_3}{dt}\operatorname{tg}\alpha+\frac{m}{dt}v_3\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{T\cos\alpha}{mg-2T\sin\alpha}=\frac{\frac{dv_3}{dt}\operatorname{tg}\alpha+\frac{v_3}{dt}\cdot\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{dv_3}{dt}}$$

В СО со скоростью v_1 (3 движется по окр)

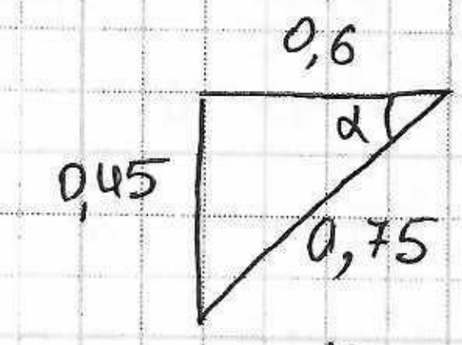


$$\omega=\frac{v_3\cos\alpha+v_1\sin\alpha}{\frac{l}{2}}=\frac{v_3\cos\alpha+v_3\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{l}{2}}=$$

$$=\frac{2v_3}{l\cos\alpha}\qquad\omega=\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dv_3}{dt}=g-\frac{2T}{m}\sin\alpha$$

$$\frac{T\cos\alpha}{mg-2T\sin\alpha}=\frac{(g-\frac{2T}{m}\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha+\frac{v_3}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{2v_3}{l\cos\alpha}}{(g-\frac{2T}{m}\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}$$



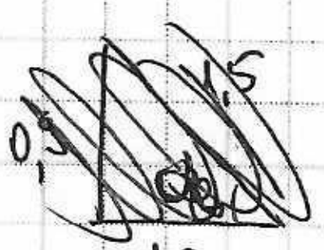
$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

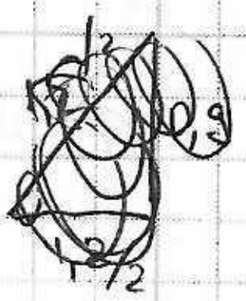
$\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$$\frac{T\cos\alpha}{mg-2T\sin\alpha}=1+\frac{\frac{2v_3^2}{l\cos^3\alpha}}{(g-\frac{2T}{m}\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}=1+\frac{\frac{2v_3^2}{l\cos^3\alpha}\operatorname{ctg}\alpha}{g-\frac{2T}{m}\sin\alpha}$$

$$\frac{T\cos\alpha}{m}=g-\frac{2T}{m}\sin\alpha+\frac{2v_3^2}{l\cos^2\alpha\sin\alpha}$$

$$\frac{T}{m}(\cos\alpha+2\sin\alpha)=g+\frac{2v_3^2}{l\cos^2\alpha\sin\alpha}$$





$$T=\frac{mg+\frac{2mv_3^2}{l\cos^2\alpha\sin\alpha}}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$$

$$T=\frac{0,1\cdot10+\frac{2\cdot0,1\cdot4,24}{1,5\cdot16\cdot3}\cdot125}{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=\frac{1+\frac{0,2\cdot4,24}{72}\cdot125}{2\cdot2}=1,06\text{Н}=0,62$$

Ответ: $v_3=2,06$ м/с; $v_1=v_2=1,54$ м/с; $T=0,62$ Н.

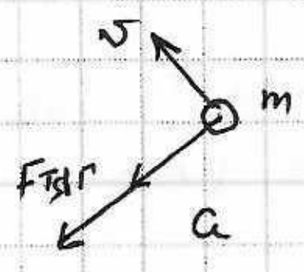
olymp.bmstu.ru

Задача 2.

R - дано $l_{min} = ?$ $T = 24$ часа

1. Рассмотрим первый спутник

$T_1 = T = 24$ часа (геостационарный)



$F_{тяг} = \frac{GMm}{R^2}$

$F_{тдг} = ma = m\frac{v^2}{R}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R}$ $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$\frac{2\pi R}{v} = T$ $\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = T = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}} = k \cdot R^{3/2}$

2. Рассмотрим второй спутник $k = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$

Вращение в одинаковую сторону.

~~Т.к. здесь минимальное расстояние то это максимальный период.~~

$T_{отн_{пов}} = T = 24$ часа



$\omega_2 - \omega_1 = \omega_{отн} = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_2 = \frac{4\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_2}$ $T_2 = \frac{T_1}{2}$

$T_2 = k \cdot R_2^{3/2} = \frac{T_1}{2} = \frac{k \cdot R^{3/2}}{2}$

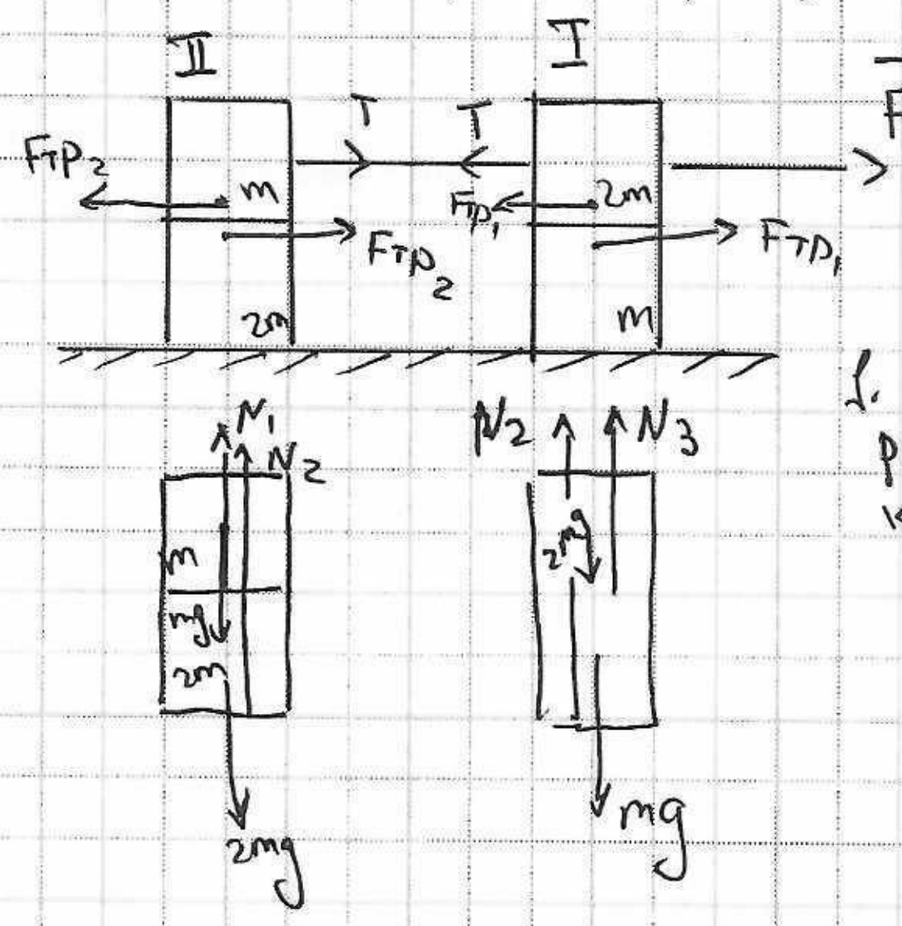
$R_2^{3/2} = \frac{R^{3/2}}{2}$ $R_2 = R \cdot \frac{1}{(2)^{2/3}}$

$l_{min} = R - R_2 = R - \frac{R}{2^{2/3}} = R\left(1 - 2^{-2/3}\right) = 0{,}37R$

Ответ: $l_{min} = 0{,}37R$.

Задача 3.

Дано: $T_0 = 10\,Н$, $\mu = 0{,}5$, F, $m = 1\,кг$, $g = 10\,м/с^2$ $\quad t_p = ?$



1. Система развалится, когда порвется нить.

$T_{конечное} = T_0$

В начале при маленькой F оба столбика движутся как единое целое

$$a_1 = \frac{F}{6m} \qquad T_1 = F$$

потом при увеличении силы начнется проскальзывание

$$N_1 = mg \quad N_3 = 2mg \quad N_2 = 3mg$$

Для того, чтобы началось проскальзывание во второй конструкции

$$T \geq \mu N_1 \geq \mu mg \qquad \mu mg < 10\,Н \Rightarrow$$ при разрыве нити вторая конструкция точно проскальзывает

для проскальзывания первой: $\quad T_0 = 2\mu mg$

$$F - T \geq \mu N_2 \geq \mu \cdot 2mg$$

~~Сначала нужно проскальзывать первое конструкции и уже после вторая. (сила прикладывается к первой)~~

1) $F \in (0;\ \mu \cdot 2mg) \qquad a = \frac{F}{6m}$

$T = \frac{F}{6m} \cdot 3m = \frac{F}{2} \in (0;\ \mu mg)$ ← нет проск.

2) ~~F ∈ (0;~~ После этого т.к ускорения верхних одинаковы

и началось проскальзывание первой (именно она первая, т.к сила приложена к ней.)

$$F = 3ma + 2\mu mg = 3ma + mg$$

$$a = \frac{F - mg}{3m} \qquad T = ma = \frac{F - mg}{3} < \mu mg \text{ (нет проск)}$$

$$\frac{F - mg}{3} < \frac{mg}{2} \qquad F < 2{,}5mg = 5\mu mg$$

$$F \in (2\mu mg;\ 5\mu mg) \qquad T \in (0;\ 1\mu mg)$$

olymp.bmstu.ru

После этого проскальзывать будут обе конструкции.

$F = 3ma + 2\mu mg + \mu mg$ $\quad T = ma$

$3ma = F - 3\mu mg$ $\quad T = \frac{F - 3\mu mg}{3}$

$a = \frac{F - 3\mu mg}{3m}$

Поломка конструкции при T_0 (F_0)

$T_0 = \frac{F_0 - 3\mu mg}{3}$ $\quad 3(T_0 + \mu mg) = F_0 = 3(10 + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 10) = 3 \cdot 15 = 45$ Н

Поломка при $F = F_0 = 45$ Н

$F(t)$	F, Н	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	t, с	2	8	14	20	26	32	38	44	50

+6 секунд каждый шаг (можно посчитать арифм прогр)

~~$t(F_0) = 20$~~ $t(F_0) = 2 + 6 \cdot 8 = 50$ секунд

Ответ: $t_{поломки} = 50$ секунд

Можно использовать оборот листа для записи решений

